استدلال احتمالی

در دنیای واقعی همه اطلاعات لازم برای تصمیم‌گیری، همیشه فراهم نیست، درنتیجه اطلاعات ناقص یا نامطمئن خواهد بود. به طور کلی عدم قطعیت در سیستم‌های خبره به دو دلیل زیر است:

1) کاربر پاسخ را به طور دقیق نمی‌داند.
2) تضمین نمی‌شود که نتیجه یک قانون همواره درست باشد حتی اگر فرض‌ها و قضایای آن قانون همگی درست باشد.

روش‌های مختلفی برای عدم قطعیت ارائه شده‌اند:

1. احتمالی (بیزین)
2. ظریب قطعیت (CF)
3. ...

احتمالات یکی از روش‌های عددی برای مواجه با عدم قطعیت است که از قرن هفدهم آغاز شده است.

تئوری احتمالات کلاسیک

احتمالات کلاسیک به آن احتمالات اولیه (A Priori Probability) گفته‌می‌شود. چرا؟

این نوع احتمالات توجهی به دنیای واقعی ندارد.مثل پرتاب سکه، بازی ورق و ...

سیستم‌های ایده ال: خصوصیات دنیای واقعی مانند فرسودگی و زوال را نشان نمی‌دهد.

مثال: تاس واقعی پس از پرتاب مکرر به سمت اعداد بزرگتر منحرف‌می‌شود، زیرا در وجه اعداد بزرگتر، سوراخ‌های بیشتری ایجادشده‌است (پس از 1,000,000 پرتاب.....)

$$P = \frac{W}{N}, \; Q = 1 - P$$

نکته: در احتمالات کلاسیک فرض‌می‌شود که احتمال رخ دادن هر یک از شش رویداد ممکن در مساله پرتاب تاس، یکسان است. فرمول اصلی P یک تعریف اولیه یا پیشین است. زیرا احتمال قبل از انجام بازی محاسبه‌می‌شود. اصطلاح اولیه به معنای چیزی است که مقدم است و یا قبل از وقوع رویداد محاسبه‌شده‌است. در محاسبه احتمال اولیه فرض‌می‌شود که هر رویداد ممکن، شناخته شده و احتمال وقوع هر رویداد با رویدادهای دیگر مساویست.

سه اصل بدیهی تئوری احتمالات

اصل نخست: $0 \le P(E) \le 1$

اصل دوم: $\sum_{i=1}^{n} P(E_i) = 1$

مجموع احتمال وقوع تمام رویدادهایی که هیچ اثری بر یکدیگر ندارند، یک است.

اصل سوم: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ که E_1 و E_2 رویدادهای انحصاری متقابل هستند.

The biggest cause of trouble in the world today is that the stupid people are so sure about things and the intelligent folks are so full of doubts.

اشکال دنیا این ست که نادانان مطمئن هستند و دانایان مردد. (برتراند راسل)

احتمالات ثانویه یا پسین(احتمالات تجربی)

احتمالات کلاسیک یا همان اطلاعات اولیه تنها برای بازی و سیستم های ایده آل، کارایی و کاربرد دارند و نمی‌توانند به پرسش‌هایی از این قبیل پاسخ‌دهند:

احتمال اینکه فردا کامپیوتر شما خراب شود؟ هوا آفتابی باشد؟...

درمقابل روش احتمالات اولیه، احتمالات تجربی است که احتمال وقوع یک رویداد را به صورت مقدار حدی یک توزیع فراوانی تعریف‌می‌کند.

$$P(E) = \lim_{N \to \infty} \frac{f(E)}{N}$$

نکته: ایده احتمالات ثانویه، این است که فراوانی وقوع یک رویداد در خلال تعداد زیادی آزمایش، اندازه‌گیری شده و از آنجا احتمالات تجربی نتیجه‌گیری می‌شود.

مثال: زمان فرضی برای سوختن لامپ

ساعت	درصد کل لامپ‌های سوخته
100	10
250	25
500	50
750	75

اگر لامپ مورد استفاده شما 750 ساعت استفاده شده باشد، شما می‌توانید نتیجه بگیرید که 75% احتمال دارد که فردا لامپ شما بسوزد.

پرسش: احتمال 75% بر اساس استقراء است یا استنباط؟ چرا؟

احتمالات شرطی

رویدادهایی که متقابل انحصاری (Mutual Exclusive) نباشند، بر روی یکدیگر اثری میگذارند ← احتمال شرطی

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad that \;\; P(B) \neq 0$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \quad و \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

P(A) ,P(B) از فضای نمونه محاسبه‌می‌شوند.

$P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A\|B)P(B)$	$P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$

تئوری بیز

احتمال شرطی: P(A|B) احتمال وقوع A به شرط B

احتمال معکوس (Inverse Probability): احتمال وقوع رویداد قبلی (B) با این فرض که رویداد بعدی (A) اتفاق افتاده باشد.

نکته: کاربرد عمده احتمال معکوس در تشخیص عیوب تجهیزات و تشخیص پزشکی است.

مساله: اگر علائمی بروز کند، هدف یافتن محکم‌ترین علت برای آن علائم است. **راه حل:** تئوری بیز که گاهی قاعده بیز یا قانون بیز هم گفته‌می‌شود.

پرسش: در مساله تشخیص عیوب کامپیوتر، اطلاعات مساله به شرح ذیل است: احتمال استفاده از درایو X، P(X) = 0.8 و احتمال استفاده از درایو X’، P(X’) = 0.2 است. همچنین احتمال خرابی درایو X طی یک سال 0.75 و احتمال خرابی درایو غیر X طی یک سال 0.5 است. حال درایوی داریم نوع آن را نمی‌دانیم (X یا X’)، اگر خراب شود احتمال اینکه از نوع X باشد چقدر است؟ از نوع غیر X چطور؟

مثال: تئوری بیز در تشخیص پزشکی هم کاربرد دارد. مثلا دانش

"معمولا یک نفر سرما می‌خورد، دمای بدنش بالا می‌رود" می تواند توسط احتمال شرطی زیر بیان شود:

$P(A \mid B) = 0.8$ که A دمای بالای بدن و B سرماخوردگی است.

پرسش: فرض کنید که می‌دانیم در هر لحظه زمانی از هر 10000 نفر، یک نفر سرما خورده است و از هر 1000 نفر، یک نفر دمای بدنش بالاست. حال دمای بدن شما بالاست، احتمال اینکه شما سرما خورده باشید چیست؟

یادگیری بیزین

به چه فرضیه‌ای معتقد باشند

$$P(H_i \mid E) = \frac{P(E \mid H_i)P(H_i)}{P(E)}$$

$H_1,H_2,\ldots,H_n$ فرضیه‌های ممکن است و برای هر فرضیه $P(H_i|E)$ محاسبه شده و فرضیه‌ای انتخاب می‌شود که بزرگترین احتمال را دارد.

استنتاج بیزین

در استنتاج به روش بیزین لازم است برآورد اولیه‌ای از تمامی فرض‌هایی که در فضای مساله وجود دارد داشته باشیم. از برآورد اولیه، احتمال اولیه محاسبه‌می شود. پرسش‌های ممکن برای احتمال اولیه: درجه حرارت بدن چقدر است؟آیا بیمار دچار سرگیجه شده است؟ ....

$$P(H_i \mid E) = \frac{P(E \mid H_i)P(H_i)}{P(E)} = \frac{P(E \mid H_i)P(H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E \mid H_i) \times P(H_i)}$$

فرم ساده برای تئوری بیز

E: مشاهده		H: فرض		$\neg H$: نقیض فرض

$$P(H \mid E) = \frac{P(E \mid H)P(H)}{P(E \mid H)P(H) + P(E \mid \neg H) \times P(\neg H)}$$

مثال: احتمال اولیه برای اینکه بیماری در بیمارستان مبتلا به برونشیت شده باشد 0.1 و احتمال اینکه بیماری مبتلا به برونشیت، تب داشته باشد 0.9 و احتمال اینکه بیماری که برونشیت ندارد، تب داشته باشد 0.07 است ، احتمال اینکه بیماری که تب دارد، برونشیت داشته باشد، چیست؟ از مقدار این احتمال، چه استنتاج می کنید؟

حل: E مشاهده تب در بیمار، H فرض بیماری برونشیت P(H) = 0.1 ، ¬ H فرض عدم ابتلا به بیماری برونشیت

P(E|H) = 0.9 , P(E|¬H) = 0.07

$P(H \mid E) = ...$

فرضیه احتمال به بیماری برونشیت پس از مشاهده تب در بیمار ....

قوانین ریاضی در جایی که به واقعیت مربوط می شوند، قطعی نیستند و وقتی قطعی باشند به واقعیت مربوط نمی گردند (اینشتین)

ضریب قطعیت(CF = Certainty Factor)

در سیستم خبره MYCIN از روش بیزین استفاده نشده است زیرا روش بیزین نیاز به:

1- جمع‌آوری اطلاعات و پیش شرط‌های اولیه دارد.

2- فرض‌می‌کند که فرضیه‌های جدا شدنی و گسسته هستند و وجه اشتراکی ندارند.

MYCIN از روش CF استفاده‌می‌کند که CF در بازه [1 0 -1] است.

- در تعیین CF اجتماع دو فرض بزرگترین CF
- در تعیین CF اشتراک دو فرض کوچکترین CF

و برای تعریف CF از مفهوم باور و ضد باور استفاده‌می‌شود.

MB[H,E] = Max[P(H|E),P(H)] - P(H)	If	$P(H) \neq 1$	MD[H,E] = Min[P(H|E),P(H)]- P(H)	If	$P(H) \neq 0$
MB[H,E] = 1	If	P(H) = 1	MD[H,E] = 1	If	P(H) = 0

CF(H,E) = MB[H,E] – MD[H,E]

اگر CF > 0 صحت و درستی فرض تقویت‌می‌شود(احتمال افزایش یابد) یعنی MB(H,E) > 0 , MD(H,E) = 0

اگر CF < 0 صحت و درستی فرض تضعیف‌می‌شود یعنی MD(H,E) > 0 , MB(H,E) = 0.

مثال: فرض‌کنید مشاهده اول اعتقاد و باور به H، MB=0.3 باشد، آنگاه CF

MB(H,E) = 0.3 > 0 , MD(H,E) = 0 ➔ CF(H,E) = 0.3

پرسش: حال اگردر مشاهده دوم $MB(H,E_2) = 0.2$ باشد، ضریب قطعیت چه خواهد شد؟

تمرین‌ها

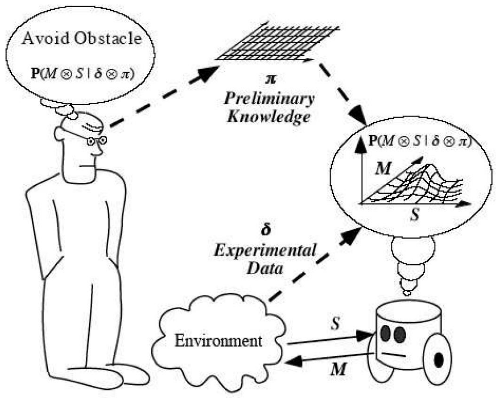
تمرین12-1: تفاوت منطق فازی(استدلال فازی) با احتمالات (استدلال احتمالی) را با مثال به طور شفاف و روشن توضیح‌دهید.

تمرین12-2*: روش‌های احتمالی نظیر شبکه باور(بیزین)، زنجیره‌های مارکوف، تئوری دمپستر- شیفر، چگونه عمل‌می‌کنند و معمولا در چه نوع کاربردهایی استفاده‌می‌شوند؟ علاوه بر این روش‌ها، چه روش‌های استدلالی احتمالی وجود دارد؟

تمرین12-3: چگونگی محاسبه قانون کامل ضرب $P(A_1 \cap A_2 \cap ... A_n) = P(A_1 \mid A_2 \cap ... A_n) P(A_2 \mid A_3 \cap ... A_n) ... P(A_{n-1} \mid A_n) P(A_n)$ را در احتمال شرح دهید.

تمرین12-4*: یکی از کاربردهای مهم استدلال احتمالی در روباتیک و مساله عدم برخورد با موانع (Avoid Obstacle) است. بررسی‌کنید چگونه از مفاهیم و تئوری‌های استدلال احتمالی در این نوع مسائل استفاده‌می‌شود.

تمرین12-5*: تئوری احتمال و تئوری امکان چیست؟ هر کدام به چه مباحثی می‌پردازند؟ تفاوت این دو تئوری در چیست؟



If a man will begin with certainties, he shall end in doubts; but if he will be content to begin with doubts he shall end in certainties.

اگر کسی با یقین آغاز کند سرانجامش به شک منتهی خواهد شد. اما اگر کسی حاضر شود که با شک آغاز کند، به یقین خواهد رسید. (فرانسیس بیکن)